

II, De Inventione Centri Oscillationis. Per Brook Taylor Armig. Regal. Societat. Sodal.

Definitio.

Est Centrum Oscillationis punctum quoddam in corpore pendulo, cujus vibrationes singulae eodem modo atq; eodem tempore peraguntur, ac si illud solum ad eandem distantiam a puncto suspensionis filo suspenderetur.

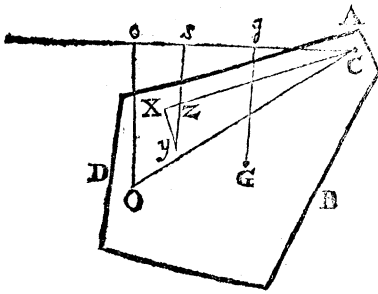
PER se vix satis manifestum est in corpore aliquo dari hujusmodi punctum : utpote cujus acceleratio debeat, (*per hanc def.*) in omnibus inclinationibus corporis penduli ad Horizontem, perinde esse, ac si a propriâ tantum gravitate urgeatur ; reliquis particulis totius corporis ejus motum proprium haud perturbantibus. Itaq; in ordine ad inventionem hujus Centri, præmittenda est una atq; altera propositio, unde constet tale punctum dari.

Prop. 1. Prob. 1

In corporis Oscillantis datâ quâvis inclinatione ad Horizontem, invenire punctum cujus acceleratio perinde sit, ac si ab ipsius propriâ tantum gravitate urgeatur.

Sit A B D corporis propositi sectio in plano ad Horizontem perpendiculari, in quo movetur centrum gravitatis G, centro suspensionis existente C. Distinguatur corpus in elementa prismatica plano A B D perpendicularia,

C 2



cularia, adeoque Horizonti semper parallela; ut facile patebit ex motu centri gravitatis G in plano illo A B D. Atq; ob hujusmodi situm, tale elementum quodvis spectari potest tanquam punctum Physicum p in plano eodem A B D ad punctum z locatum. Reducatur itaq; corpus

propositum in planum Physicum A B D constans ex hujusmodi particulis p.

In hoc plano ut inveniatur punctum O, cujus acceleratio propria non mutatur ab actionibus particularum reliquarum, attendendum est ad vires particulæ cujusvis singularis p in puncto z sitæ. Nam ex hisce viribus conjunctis oritur plani totius motus absolutus; cujus ope datur motus puncti cujusvis propositi; unde vicissim invenitur punctum cujus motus est datus.

At urgetur particula p a vi propriæ gravitatis; quæ si partium cohesio dissolveretur, in dato tempore minimo, datam produceret accelerationem motûs in perpendiculari ad Horizontem zy. Ad Cz duc normalem yx, & resolvetur acceleratio zy in partes zx & xy. Ob corporis rigiditatem, tollitur vis zx per resistantiam puncti C. At vi reliquâ xy trahitur spatium ABD in gyrum circa punctum C; & ductâ horizontali Co & perpendiculari zs, erit ea ut $\frac{Cs}{Cz}$: Nempe ob gravitatis vim datam, & similia triangula xy z & s Cz. Ergo vis particulæ p ad movendum spatium ABD est ut $\frac{Cs}{Cz} \times p$.

Ad has vires in unum colligendas, sit O punctum invariabile, in lineâ ad libitum ductâ & ad distantiam ad hac incognitam CO. Tum erit vis particulæ p ad movendum

vendum punctum O, ut $\frac{Cz}{CO} \times \frac{Cs}{Cz} \times p$, hoc est ut $\frac{Cs}{CO} \times p$.

Acceleratio autem, quam tribuit p eidem puncto O, erit ut $\frac{CO}{Cz} \times \frac{Cs}{Cz}$. Itaq; applicatâ vi illâ $\frac{Cs}{CO} \times p$ ad hanc ac-

celerationem $\frac{CO \times Cs}{Cz q}$, erit quotiens $\frac{Cz q}{CO q}$ * p particu-
la, quæ, si in ipso puncto O fingatur moveri cum eâdem
acceleratione $\frac{CO \times Cs}{Cz q}$, eundem omnino produceret

motum, quem in eodem puncto O producit particula p.
Hinc demum reducitur Problema ad motuum Theorema
notissimum: Applicatâ enim summâ virium $\frac{Cs}{CO} \times p$ ad sum-

mam particularum $\frac{Cz q}{CO q} \times p$, erit quotiens acceleratio
absoluta puncti O. Dein ductâ perpendiculari O o,
& positâ hac acceleratione æquali datæ accelerationi
 $\frac{Co}{CO}$ ipsius puncti O, dabitur distantia CO. Sit enim $\frac{Co}{CO} = d$,

& (juxta methodum *Fluxionum*) $Cs \times p = M$, & $Cz q : p = \dot{C}$. Tum ob CO invariabilem erit summa om-
nium virium $\frac{Cs}{CO} \times p = \frac{M}{CO}$, & summa omnium parti-

cularum $\frac{Cz q}{CO q} \times p = \frac{C}{CO q}$. Unde, applicatâ summâ
momentorum ad summam corporum, erit $\frac{M}{C} \times CO = d$

adeoq; $CO = \frac{d C}{M}$. Inventis igitur C & M, per *Fluxio-*
num methodum inversam, dabitur CO. Q. E. I.

Cor. A centro gravitatis G ad horizontalem Co duc
perpendicularem Gg, & sit corpus ipsum ABC = A.
Tum

(14)

Tum ex notissimâ indole centri gravitatis erit $M = Cg \times A$.

Unde est $CO = \frac{d C}{C g \times A}$.

Prop. 2. Theor. 1.

Isdem votis. aueratur punctum O in rectâ C G transe.

(15)

$$= CGq: + Gzq: + 2CG \times Gf:$$

Est ergo C = (aggregato omnium Czq: * p =) aggregato omnium CGq: * p + Gzq: * p

— 2CG * GF * p + 2CG * Gf * p. At ob centrum gravitatis G, est aggregatum omnium 2CG * GF * p = aggregato omnium 2CG * Gf * p. Quare est C = aggregato omnium CGq: * p + Gzq: * p = CGq: * A + D. At enim per Theor. I. est CO = $\frac{C}{CG * A}$. Ergo CO = CG + $\frac{D}{CG * A}$.

Q. E. D.

Cor. Hinc datur parallelogrammum CG * GO. Est enim GO = $\frac{D}{CG * A}$. At dantur A & D. Quare datur CG * GO = $\frac{D}{A}$.

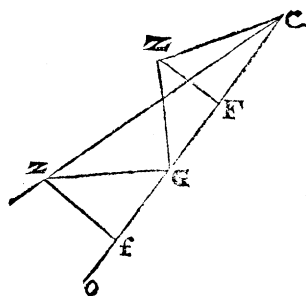
Prop. 4. Theor. 3.

Iisdem positis, si in puncto O constituitur particula physica $\frac{CG * A}{CO}$, quæ propria gravitate agitata Oscillet circa punctum C; spatij ABC motus perinde omnino erit, ac si agitaretur ab Oscillatione ipsius corporis A.

Constat tam ex Natura centri gravitatis, quam per Prob

1. Est enim $\frac{CG * A}{CO}$ aggregatum omnium $\frac{Czq: * p}{COq:}$

= $\frac{C}{COq:}$.



Prop. 5.

Prop. 5. Prob. 2.

Datis corporis cujusvis magnitudine A, centro gravitatis G, & puncto suspensionis C. Invenire ejusdem centrum Oscillationis O.

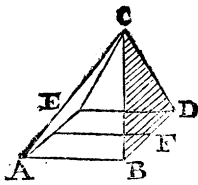
Fit per Theor. 1. inveniendò quantitatem C; vel per Theor. 2. quærendo quantitatem D.

Scholium.

Ad instituentium calculum in casu particulari, eligenda est quantitas C vel D, prout suggerit natura figuræ propositæ. Dein dati earum alterutrâ, altera item dabitur per æquationem (Prop. 3.) $C = CG q : \times A + D$. Unde etiam dabitur pgr. $CG \times GO = \frac{D}{A}$ (Cor. Prop. 3.)

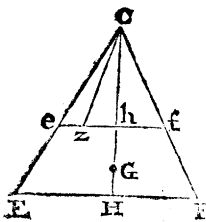
$= \frac{C}{A} - CG q :$. Cujus ope, ex datis centro gravitatis & puncto suspensionis, datur centrum Oscillationis per solam divisionem. Quare in quolibet exemplo semper commodissimum erit hoc parallelogrammum primum eruere, vel per computum ipsius D, vel per quantitatem C, ex idoneâ assumptione centri suspensionis.

Supereſt, ut hæc exemplis aliquot illustremus.



EF lateri AB parallelam.

Ex. 1. Sit figura proposita Pyramis AD C, cujus basis est pgr. AD, sitque motus centri gravitatis in plano tranſeunte per verticem C & diametrum basis



Ad calculum commodissime instituentium, sit ipse vertex C centrum suspensionis. Tum ad modum Prob. 1. reducatur figura ad planum physicum trianguli Isoscelis CEF, in quo e f parallela ipsi EF repræſentat lineam physicam ex particulis p compositam. Sit CH = a.

HF

(17)

H F = b, & C h = x. Tum ex naturâ figuræ erit
 $e h = \frac{b x}{a}$, & particula p sita ad punctum z erit ut x; vel

Potius, facto h z = v, erit $\dot{v} \dot{x}$ elementi prismatici basis,
 & p erit ut $\dot{v} \dot{x} x$. Unde erit $\dot{C} = C z q : x \dot{v} \dot{x} x = \dot{v} x x^3$
 $+ \dot{x} \dot{v} v^2 x$. Ideoq; summa omnium C z q : x p in lineâ

h z erit $v \dot{x} x^3 + \frac{\dot{x} x v^3}{3}$; & in lineâ e f (pro v po-
 nendo $\frac{b x}{a}$) erit summa illa $\frac{6 b a^2 + 2 b^3}{3 a^3} \dot{x} x x^4$. Unde

iterum capiendo fluentem, & pro x scribendo a, erit
 $C = \frac{6 b a^2 + 2 b^3}{15} \times a^2$. Est autem pyramis ipsa A

$= \frac{2 b a a}{3}$, & distantia centri gravitatis G a vertice C

est $C G = \frac{3}{4} a$. Unde $\frac{C}{A} - C G q : = \frac{D}{A} = C G \times C O$
 $= \frac{3 a^2 + 16 b^2}{80}$.

Ex. 2. Sit figura proposita Conus rectus descriptus ro-
 tatione trianguli isoscelis E C F circa perpendicularum
 C H.

Hic iterum sumpto vertice C pro centro suspensionis,
 & factis C H = a, H E = b, C h = x, h z = v, ut

supra; erit $p = 2 \dot{x} \dot{v} \times \sqrt{\frac{b b}{a a} x x - v v}$; unde $\dot{C} = 2 \dot{v} \dot{x}$

$\times x x + v v \times \sqrt{\frac{b b}{a a} x x - v v}$. Sit B segmentum cir-

culi diametro e f descripti, quod adjacet Abscissæ h z = v,

D

& Or.

& Ordinatae $\sqrt{\frac{b}{a} x x - v v}$; tum erit summa omnium

C z q : x p in rectâ h z = $2 \dot{x} \times \frac{4 a^2 + b^2}{4 a^2} x^2 B - \frac{1}{2} \dot{x} v$

$\times \frac{b^2}{a^2} x^2 - v^2 \Big|^{1/2}$. Et quando $v = c h$, erit hæc summa

$2 \dot{x} \times \frac{4 a^2 + b^2}{4 a^2} x^2 B$; cujus duplum $\frac{4 a^2 + b^2}{a^2} \dot{x} x^2 B$ est

pars ipsius C in rectâ e f. Est autem area B ut x^2 ; sit

ergo $B = c x^2$; atq; pars illa ipsius C erit $\frac{4 a^2 + b^2}{a^2} \times$

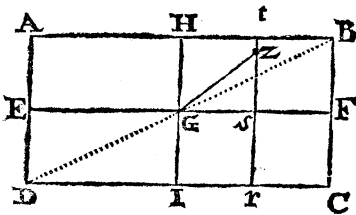
$\times c \dot{x} x^4$. Unde capiendo fluentem erit $C = \frac{4 a^2 + b^2}{5} \times c a^2$.

Est autem conus ipse $A = \frac{4}{3} c a^3$, & $C G = \frac{2}{3} a$. Unde

$$\frac{C}{A} - C G q := \frac{D}{A} = \frac{3 a^2 + 12 b^2}{80}$$

Atq; ad hunc modum procedit calculus in alijs figuris, ubi rationes Ch ad h e, & h z ad p sunt magis compositæ.

Ex. 3. Ut pateat ratio calculi quantitatis D, sit figura



proposita parallelepipedon, cujus facies Horizonti perpendicularis, & parallela plano motûs centri gravitatis est $A B D$. Duc diametros $E F$ & $H I$, & sit altitudo elementorum p , :: & fit $t r$ parallela $H I$; & $G F = a$,

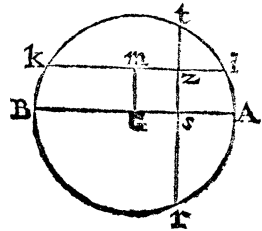
$G H = b$, $G s = x$, & $s z = v$. Tum erit $\dot{D} = \dot{v} \dot{x} x x + \dot{x} \dot{v} v v$. Unde ipsius D pars in rectâ $t r$ erit $2 b \dot{x} x^2 + 3 b s \dot{x}$; atq; iterum sumendo fluentis duplum, erit

D

$D = \frac{4 b a^3 + 4 b^3 a}{3}$. Atqui est $A = 4 a b$; unde est

$$\frac{D}{A} = \frac{a^2 + b^2}{3} = \frac{1}{12} D B \text{ quad.}$$

Ex. 4. Sit ultimum exemplum in Sphæra, cujus circulus maximus $B t r$, diameter $A B$, & centrum G . Tum ductis lineis ut in Schemate satis patent, erit $\dot{D} = G s q : x p + G m q : x p$. At summa omnium $G s q : x p$ in recta $t r$ est $G s q$: ductum in aream circuli diametro $t r$ descripti. Item summa omnium $G m q : x p$ in rectâ $k i$ est $G m q : x$ aream circuli diametro $k i$ descripti. Unde statim constat esse $D =$ quater fluenti ipsius $G s q$: in aream circuli cujus diameter est $t r$. Sit ergo c area circuli cujus radij quadratum est 1 , & sit $G A = a$, & $G s = x$. Tum erit $\dot{D} = 4 x x x \times c a a - c x x = 4 c a^2 x^2 - 4 c x^4$. Unde sumendo fluentem, & faciendo $x = a$, erit $D = \frac{8}{15} c a^5$. Est autem $A = \frac{4}{3} c a^3$.



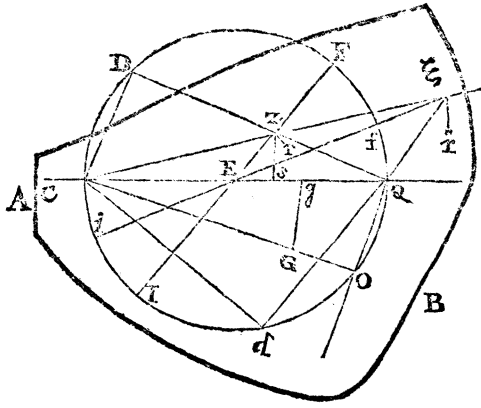
Unde $\frac{D}{A} = \frac{2}{5} a a$.

Ob affinitatem solutionis libet his subjungere Problema de inventione Centri Percussionis.

Prop. 6. Prob. 3.

Corporis cujusvis circa datum punctum rotati, invenire Centrum Percussionis; punctum scilicet tale, ut Corpus in illud impingens, & eâdem operâ solutum a puncto suspensionis, neque huc neque illuc inclinet;

Primum constat hoc punctum quæri debere in plano motus centri gravitatis. Si enim corpus resolvatur in e-



lementa prismatica plano isti normalia, ferentur ea motu sibi parallelo; unde momenta ex utraq; parte istius plani erunt æqualia; adeoq; per resistantiam factam in hoc plano, corporis punctum nullum de eo pelletur. Sit ergo planum illud A, B , ad quod re-

ducetur corpus per contractionem elementorum prismaticorum in particulas p ad puncta z sitas, ut in *Prob. 1.* In hoc plano sit C centrum rotationis; aut saltem ejus projectio facta per lineam perpendicularem in hoc planum demissam; & sit Q punctum quæsitum. Per C duc ad libitum $C \xi$, in quâ sume puncta duo z & ξ , ita ut ductis $z Q$ & ξQ , sit angulus $C z Q$ obtusus, & angulus $C \xi Q$ acutus: atque in punctis z & ξ sint particule p & π . Tum ad $C \xi$ ductis normalibus $z r$ & ξr , quæ sint ad inuicem ut $C z$ ad $C \xi$, ijs representabuntur velocitates absolutæ particularum p & π . At harum velocitatum partes quæ sunt in directionibus $z Q$ & ξQ , tolluntur per resistantiam puncti Q . Ad $Q z$ & $Q \xi$ duc normales $C D$ & $C d$, & ob angulos æquales $z C D = r z Q$, & $\xi C d = r \xi Q$, velocitatum partes reliquæ, in directionibus ipsis $Q z$ & $Q \xi$ perpendicularibus, erunt ut $z D$ & ξd . Unde habitâ ratione distantiarum $Q z$ & $Q \xi$, erunt vires particularum p & π ad movendum spatium $A B$ in partes contrarias, ut $D z \times z Q \times p$, & $d \xi \times \xi Q \times \pi$. At per conditiones Problematis debent summæ hujusmodi contrariarum virium esse inter se æquales.

Ob angulos ad D & d rectos, sunt puncta D & d ad circumferentiam circuli diametro CQ descripti. Sit istius circuli centrum E. Tam ductis Ez & Eξ circulo occurrentibus in F & I, f & i, erit Dz × zQ = Fz × zI = EFq: — Ezq: = EQq: — Ezq:, & dξ × ξQ = Eξq: — EQq: Quare erit summa omnium EQq: × p — Ezq: × p = summa omnium Eξq: × π — EQq: × π; & terminis transpositis, summa omnium EQq: × p + π: = summa omnium Ezq: × p + Eξq: × π, hoc est, si p ponatur tam pro particulâ p intra circulum, quam pro particulâ π extra circulum, erit summa omnium EQq: × p = summa omnium Ezq: × p. Ad CQ duc normalem zs. Tum erit Ezq: = Czq: + ECq: — QC × Cs. Quo valore ipsius Ezq: ei substituto, & æquatione debite tractatâ, tandem inuenies summam omnium CQ × Cs × p = summa omnium Czq: × p. Unde est CQ

$$= \frac{\text{summa omnium Czq:} \times p}{\text{summa omnium Cs} \times p}.$$
 At enim est summa omnium Czq: × p ipsa quantitas C in calculo centri Oscillationis: & si centrum gravitatis sit G, & ad CQ ducatur normalis Gg, & corpus ipsum dicatur A, erit summa omnium Cs × p = Cg × A. Unde est CQ
$$= \frac{C}{Cg \times A}.$$
 Sit centrum Oscillationis O; tum per

Theor. I. erit $CO = \frac{C}{CG \times A}.$ Unde est Cg:CG::CO:CQ. Quare per O ducta ad CO perpendicularis transibit per punctum Q. Q. E. I.